TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Viktoriia Dziuba

Lämpöyhtälö ja sen ratkaisut

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka ja tilastotieteet
Matematiikan aineenopettajakoulutus
Huhtikuu 2016

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
DZIUBA, VIKTORIIA: Lämpöyhtälö ja sen ratkaisut
Pro gradu -tutkielma, 31 s.
Matematiikka ja tilastotieteet
Matematiikan aineenopettajakoulutus
Huhtikuu 2016

Tiivistelmä

Tutkielman tavoitteena on esittää tiivis ja selkeä materiaali, joka voisi toimia yhtenä tiedonlähteenä kaikille osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriasta (erityisesti lämpöyhtälön teoriasta) kiinnostuneille: yliopistojen ja korkeakoulujen opiskelijoille, jotka tavoittelevat perehtyä osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja niiden sovelluksiin, ja opettajille, jotka antavat vastaavien teemojen opetusta ja suunnittelevat tuntien kulkua.

Tärkeimpinä osittaisdifferentiaaliyhtälöinä pidetään Laplacen yhtälö, lämpöyhtälö ja aaltoyhtälö. Tutkielma käsittelee yhtä tärkeimmistä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä – lämpöyhtälöä. Lämpöyhtälöä käytetään laajalti fysiikan, biologian, geologian ja jopa yhteiskuntatieteiden sovelluksissa. Tämä tarkoittaa, että tarve ratkaista lämpöyhtälöä voi esiintyä hyvin erilaisilla sovellusalueilla, jopa matematiikasta kaukana olevilla. Tämän ilmiön yleisen kuvan ja yhtälön ratkaisulogiikan syvä ymmärrys voi huomattavasti helpottaa erilaisten ongelmien ratkaisuprosesseja.

Tutkielmassa johdetaan 1-ulotteisen ja moniulotteisen lämpöyhtälöitä ja esitellään tapoja ratkaista niitä.

Tutkielman lukijalta oletetaan differentiaaliyhtälöiden teoria, differentiaali- ja integraalilaskennan tuntemista ja muutenkin riittävää matemaattista kypsyyttä, joka auttaa seuraamaan tutkielman kulkua.

Asiasanat Osittaisdifferentiaaliyhtälö, tavallinen differentiaaliyhtälö, Sturm-Liouvillen ongelma, ominaisfunktiot, ominaisarvot.

Sisältö

1 Johdanto **3**

2 Valmistelevat teoriatiedot **5**
2.1 Tarvittavat määritelmät 5
2.2 Fourier'n sarjat 7
2.3 Gaussin divergenssilause 7
2.4 Sturm-Liouvillen ominaisarvo-ongelma 8
2.4.1 Sturm-Liouvillen ongelma. Alueena väli 9
2.4.2 Sturm-Liouvillen ongelma. Alueena suorakulmio 10
2.4.3 Sturm-Liouvillen ongelma. Alueena yksikköympyrä . . 12

3 1-ulotteisen lämpöyhtälö **15**
3.1 1-ulotteisen lämpöyhtälön johto 15
3.2 1-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaiseminen muuttujien erottamismenetelmällä 17
3.2.1 Homogeeninen lämpöyhtälö 17
3.2.2 Epähomogeeninen lämpöyhtälö 22

4 Moniulotteinen lämpöyhtälö **25**
4.1 3-ulotteisen lämpöyhtälön johto 25
4.2 2-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaiseminen 26
4.2.1 2-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaisu. Alueena suorakulmio. Homogeeniset reunaehdot 26
4.2.2 2-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaisu. Alueena yksikköympyrä. Homogeeniset reunaehdot 29

Kirjallisuutta **31**

Luku 1

Johdanto

Differentiaaliyhtälöiden teoria on yksi suurimmista modernin matematiikan alueista, jonka tärkeimpänä ominaisuutena pidetään suora yhteys sovelluksiin.

Tämän teorian tärkein sovellus on laatia ja tutkia reaalimaailman matemaattisia malleja. Tutkimalla fysikaalisia ilmiöitä tutkija laatii tämän ilmiön matemaattista idealisaatiota; toisin sanoin hän kuvailee kyseessä olevaa prosessia matemaattisin keinoin – esittelee tämän ilmiön peruslakeja matemaattisessa muodossa. Hyvin usein näitä lakeja voidaan ilmaista differentiaaliyhtälöiden muodossa. Saatuihin differentiaaliyhtälöihin tutkija lisää kyseessä olevaa ilmiöitä kuvaavat lisäehdot, jotka tavallisesti asetaan alku- ja reunaehtojen muodossa, ja tutkii saatuja differentiaaliyhtälöitä asetetuilla lisäehdoilla. Tällä tavalla tutkija kerää tietoja fysikaalisesta prosessista, joita analysoimalla hän saa mahdollisuuden kuvailla tämän ilmiön nykyisyyttä, historiaa ja jopa tulevaisuutta. Matemaattisen mallin tutkimus matemaattisin keinoin tarjoaa erinomaisia mahdollisuuksia laadukkaasti kuvailla fyysikaalisten ilmiöiden ominaisuuksia ja suorittaa tarvittavat laskennat tietyllä tarkkuudella. Sen lisäksi tälläisellä tutkimuskeinolla tutkijalla on mahdollisuus saada käsitys fysikaalisen ilmiön ytimestä ja joskus jopa ennustaa uusia fyysisiä vaikutuksia ja seurauksia. Näin esimerkiksi mallinnetaan erilaisia kontinuumimekaniikan ilmiöitä, kemiallisia reaktioita ja sähköisiä ja magneettisia ilmiöitä.

Differentiaaliyhtälöiden teoria alkoi kehittyä XVII vuosisadalla. Perusta tälle tieteenalalle antoivat D'Alembertin (1717 - 1783), Eulerin (1707 - 1783), Bernoullin (1700 - 1782), Lagrangen (1736 - 1813), Laplacen (1749 - 1827), Poissonin (1781 - 1840), Fourierin (1768 - 1830) ja muiden tutkijoiden tieteelliset teokset. Mielenkiintoista on, että monet heistä olivat matemaatikkoiden lisäksi myös tähtitieteilijoita, mekaanikoita ja fyysikoita.

Nykyisin differentiaaliyhtälöiden teoria on erittäin rikas, nopeasti kehittyvä matematiikan alue, joka on hyvässä yhteydessä matematiikan muihin alueihin ja niiden sovelluksiin.

Tärkeimpinä osittaisdifferentiaaliyhtälöinä pidetään Laplacen yhtälö, lämpöyhtälö ja aaltoyhtälö.

Tutkielma käsittelee yhtä tärkeimmistä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä – lämpöyhtälöä. Lämpöyhtälöä käytetään laajalti fysiikan, biologian, geologian ja jopa yhteiskuntatieteiden sovelluksissa. Suure, jolla ilmaistaan lämpotilä u, voi lämmönjohtumisen lisäksi kuvata esimerkiksi kemiallista konsentraatiota ja pörssioption hintaa. Tämä tarkoittaa, että tarve ratkaista lämpöyhtälöä voi esiintyä hyvin erilaisilla sovellusalueilla, jopa matematiikasta kaukana olevilla. Tämän ilmiön yleisen kuvan ja yhtälön ratkaisulogiikan syvä ymmärrys voi huomattavasti helpottaa ongelman ratkaisuprosesseja.

Tutkielman tavoitteena on esittää tiivis ja selkeä materiaali, joka voisi toimia yhtenä tiedon lähteenä kaikille lämpöyhtälön teoriasta kiinnostuneille: sekä tätä teoriaa opiskeleville ja opettaville että tapauskohtaisesti sitä soveltaville. Tutkielman motivaationa on ollut pyrkimys laatia helposti ymmärrettävä, selkeä ja tiivis ns. opas lämpöyhtälön maailmaan – opetusmateriaali, joka voisi olla hyödyksi kaikissa opiskelumuodoissa. Lukijan oletetaan tuntevan differentiaaliyhtälöiden teoriaa, differentiaali- ja integraalilaskentaa. Odotetaan, että lukijalla on riittävä matemaattinen kypsyys, joka auttaa seuraamaan tutkielman kulkua.

Kappaleessa 2 kertauksenomaisesti esitellään differentiaaliyhtälöiden ja niihin liittyvien käsitteiden määritelmiä. Yleisesti lajitellaan differentiaaliyhtälöt ja poimitaan niistä fysikaalisia ilmiöitä kuvaavia yhtälöitä. Esitellään Fourier'n sarjoja, Gaussin divergenssilause, Sturm-Liouvillen ominaisarvo-ongelma ja sen ratkaisutekniikkoita.

Kolmannessa kappaleessa keskitytään 1-ulotteisen lämpöyhtälön johtoon ja kuvaillaan tämän yhtälön ratkaisemista.

Tutkielman lopussa tutustutaan moniulotteiseen lämpöyhtälöön ja sen ratkaisuihin.

Päälähdeteoksina käytetään seuraavia lähteitä: Guenther [3], Hancock [4], Freiling & Yurko [2], Lienhard [6], luentomonisteet Kumpulainen [5], Parvinen [7], Tuomela [8].

Luku 2

Valmistelevat teoriatiedot

2.1 Tarvittavat määritelmät

Päälähdeteoksina tässä kappaleessa käytetään seuraavia lähteitä: Guenther [3], Hancock [4], Freiling & Yurko [2], luentomonisteet Kumpulainen [5], Parvinen [7], Tuomela [8].

Määritelmä 2.1. *Osittaisdifferentiaaliyhtälöllä* tarkoitetaan yhtälöä, joka sisältää kahdesta tai useammasta vapaasta muuttujasta riippuvan tuntemattoman funktion ja sen osittaisderivaattoja.

Määritelmä 2.2. *Osittaisdifferentiaaliyhtälön kertaluku* on siinä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku.

Kolmen muuttujan tapauksessa *Yleinen toisen kertaluvun lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö* voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = G, \tag{2.1}$$

missä u on tuntematon funktio, A_{ij}, B_i, C, G ovat muuttujien x_i funktioita, joista A_{ij} eivät kaikki ole identtisesti nollia.

Kahden muuttujan tapauksessa yhtälö (2.1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G. \tag{2.2}$$

Määritelmä 2.3. Yhtälö (2.2) on *homogeeninen*, jos $G = 0$, ja *epähomogeeninen*, jos $G \neq 0$.

Määritelmä 2.4. Yhtälö (2.2) on (luentomoniste Kumpulainen [5])
- *elliptinen*, jos $B^2 - 4AC < 0$
- *hyperbolinen*, jos $B^2 - 4AC > 0$
- *parabolinen*, jos $B^2 - 4AC = 0$.

Määritelmä 2.5. *Osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisu* annetulla vapaiden muuttujien muodostaman avaruuden alueella on funktio, joka toteuttaa kyseisen osittaisdifferentiaaliyhtälön tällä alueella.
Osittaisdifferentiaaliyhtälöllä on äärettömästi monta ratkaisua, joita riippuvat toisistaan riippumattomista vakioista ja muodostavat ns. ratkaisujen joukko.
Osittaisdifferentiaaliyhtälön *yleinen ratkaisu* on sen kaikkien ratkaisujen joukko.
Osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisun etsimisen prosessia kutsutaan differentiaaliyhtälön *integroinniksi*.

Esimerkki 2.1. Yhtälön $y^{'}(x) - y(x) = 0$ ratkaisu on funktio $f(x) = e^x$, sillä $(e^x)' - e^x = 0$.
Huomautus. Annetulla yhtälöllä on myös ratkaisu $f(x) = Ce^x$, missä C on mielivaltainen vakio. Tämä tarkoittaa, että yhtälöllä on äärettömästi monta ratkaisua vakiosta C riippuen.

Määritelmä 2.6. Pro gradussa tarkastellaan *reuna-arvo-ongelmia*, joissa on tehtävänä määrätä annetussa alueessa R yhtälön (2.1) sellainen ratkaisu $u = u(x, y, z)$ (tai $u = u(x, y)$, tai $u = u(x)$ riippuen tehtävän ulottuvuudesta), jolla on toisen kertaluvun jatkuvat osittaisderivaatat alueessa R ja joka toteuttaa annetut *reunaehdot*, joilla tarkoitetaan, että u ja/tai jokin sen osittaisderivaatoista saa annetut arvot alueen R reunakäyrällä ∂R. Sanotaan, että reuna-arvo-ongelma on *hyvin asetettu*, jos sillä on yksikäsitteisesti määrätty ratkaisu, joka riippuu jatkuvasti reunaehdoista.

Määritelmä 2.7. Yleisesti tarkastellaan reunaehtoa

$$\alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = h(t),$$

missä α ja β ovat joitain vakioita ja h jokin annettu funktio.
Jos $\beta = 0$ tätä ehtoa kutsutaan *Dirichlet'n reunaehdoksi.*
Jos $\alpha = 0$ tätä ehtoa kutsutaan *Neumannin reunaehdoksi.*
Jos sekä $\alpha \neq 0$ että $\beta \neq 0$ ehtoa kutsutaan *Robinin reunaehdoksi.*
Jos $h = 0$ reunaehto on homogeeninen.

Määritelmä 2.8. On olemassa seuraavat menetelmät jotta ratkaista reuna-arvotehtäviä (luentomoniste Kumpulainen [5]):

- Yleiseen ratkaisuun perustuva menetelmä. Etsitään ensin osittaisdifferentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu ja pyritään sitten määrittämään integroimisfunktiot niin, että reunaehdot toteuttavat.

- Muuttujien erottamiseen perustuva menetelmä. Menetelmä soveltuu tapauksiin, joissa ratkaisut voidaan esittää yhden muuttujan funktioiden tulona. Osittaisdifferentiaaliyhtälö muuttuu tällöin kahdeksi tai useammaksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi.

- Laplace- tai Fourier-muunnokseen perustuvat menetelmät.
- Muita menetelmiä, mm. funktioteoriaan perustuva menetelmä, Greenin funktioihin perustuva menetelmä, numeerisia menetelmiä.

Lause 2.1.1 (Superpositioperiaate)**.** *Jos* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *ovat lineaarisen homogeenisen osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisuja, niin myös lauseke*

$$u = u_1 c_1 + u_2 c_2 + \cdots + u_n c_n,$$

missä $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *ovat vakioita, on ratkaisu.*

Lause 2.1.2. *Lineaarisen epähomogeenisen osittaisdifferentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu saadaan laskemalla yhteen vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu* u_h *ja epähomogeenisen yhtälön jokin yksityisratkaisu* u_0*:* $u = u_h + u_0$.

2.2 Fourier'n sarjat

Fourier-sarjojen avulla tutkitaan jaksollisia funktioita. Niitä käytetään ratkaistessa osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, jotka mallintavat erilaisia luonnonilmiöitä, lämpöyhtälöä mukaan lukien.

Määritelmä 2.9. Funktion f (jakso on $[-\pi, \pi]$) Fourier'n sarjaesitys määritellään kaavalla:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big), \tag{2.3}$$

missä

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

2.3 Gaussin divergenssilause

Gaussin divergenssilause (engl. divergence theorem tai Gauss' theorem) yhdistää pintaintegraalin suljetun pinnan yli ja tilavuusintegraalin kyseisen pinnan sisäänsä sulkeman tilavuuden yli.

Lause 2.3.1. *Olkoon* E *on 3-ulotteinen avaruus, jolle on asetettu karteesinen koordinaatisto. Olkoon* $V \subset E$ *on avaruuden* E *säännöllinen alue, jonka reuna* ∂V *on sileä pinta.*

Vektorin $\vec{F}$ normaalikomponentin integraali yli suljetun pinnan ∂V on sama, kuin sen divergenssin integraali pinnan sulkeman tilavuuden V yli:

$$\int\int_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \int\int_{V}\int \nabla\cdot\vec{F}dV,$$

missä $\vec{F}$ on mikä tahansa jatkuvasti derivoituva alueessa V vektorifunktio,
$\vec{n}$ on yksikköulkonormaali,
vektorifunktion $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ divergenssi on:

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

2.4 Sturm-Liouvillen ominaisarvo-ongelma

Tarkastellaan toisen kertaluvun differentiaalioperaattoria

$$Ly = p_0(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + p_2(x)y(x). \tag{2.5}$$

Oletetaan, että tarkasteltavalla välillä kerroinfunktiot p_i ovat derivoituvia. Kun yhtälö (2.5) kerrotaan puolittain lausekkeella

$$\frac{1}{p_0(x)}e^{P(x)}, \quad \text{missä} \quad P(x) = \int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx,$$

saadaan yhtälö

$$Ly(x) = \frac{d}{dx}(p\frac{dy(x)}{dx}) + qy(x) = 0, \tag{2.6}$$

missä

$$p = e^P \quad \text{ja} \quad q = \frac{p_2}{p_0}e^P.$$

Määritelmä 2.10. Yhtälöä (2.6) kutsutaan yhtälön (2.5) *itseadjungoiduksi muodoksi.*

Määritelmä 2.11. Differentiaaliyhtälöä

$$Ly + \lambda ry = \frac{d}{dx}(p\frac{dy(x)}{dx}) + qy(x) + \lambda ry(x) = 0 \tag{2.7}$$

kutsutaan *Sturm-Liouvillen differentiaaliyhtälöksi.*

Määritelmä 2.12. Yhtälö (2.7) yhdessä reunaehtojen

$$\begin{cases} B_1(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, & \mid\alpha\mid + \mid\beta\mid > 0, \\ B_2(y) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, & \mid\gamma\mid + \mid\delta\mid > 0 \end{cases}$$

kanssa on *Sturm-Liouvillen reuna-arvoprobleema* (luentomoniste Kumpulainen [5]).

Määritelmä 2.13. Jos Sturm-Liouvillen probleemalla on annettua lukua $\lambda \in R$ kohti ei-triviaali ratkaisu y, sanomme, että λ on Sturm-Liouvillen reuna-arvo-ongelman *ominaisarvo* ja y ominaisarvoa λ vastaavaa *ominaisfunktio* (luentomoniste Kumpulainen [5]).
Sturm-Liouvillen ominaisarvotehtävän ominaisfunktiot muodostavat ortogonaalisysteemin sisätulon suhteen:

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_a^b y_n y_m dx.$$

Määritelmä 2.14. *Sturm-Liouvillen reuna-arvo-ongelman ratkaiseminen* tarkoittaa sen kaikkien ominaisarvojen ja ominaisfunktioiden määräämistä (luentomoniste Kumpulainen [5]). Varsinainen ratkaisu saadaan tällöin ominaisfunktioiden summana, eli sarjaratkaisuna.

Pro gradussa tarkasteltavan lämpöyhtälön ratkaiseminen voidaan johtaa seuraavaan reuna-arvoprobleemaan:

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\Big) + \lambda v = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \\ &v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \tag{2.8}$$

missä D on tarkasteltava säännöllinen alue ($D \subseteq R^3$), jonka reuna on ∂D; $\mathbf{x} = (x, y, z) \in D$ on alueen piste.
Tälläinen tehtävä tietyillä ehdoilla kuuluu Sturm-Liouvillen ongelmien joukkoon (Hancock [4]) ja sitä voidaan ratkaista muuttujien erottamismenetelmällä. Tällöin osa tehtävästä palautuu tavallisen differentiaaliyhtälön reuna-arvotehtäväksi. Varsinainen ratkaisu saadaan ominaisfunktioiden summana.

2.4.1 Sturm-Liouvillen ongelma. Alueena väli

Tässä kappaleessa alueena käsitellään L-pituinen väli

$$D = \{x : 0 \leq x \leq L\}.$$

Tehtävänä on ratkaista reuna-arvo-ongelman (2.8), joka saa tässä tilanteessa seuraavan muodon (Sturm-Liouvillen ongelman muoto):

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(L) = 0, \quad x \in D. \tag{2.9}$$

Tapaus $\lambda > 0$. Tässä tapauksessa superpositioperiatteen (lause (2.1.1)) mukaan yleinen ratkaisu (määritelmä (2.5)) on muotoa

$$v = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x). \tag{2.10}$$

Kun sijoitetaan reunaehdot, saadaan $v(0) = C_2 = 0$ ja $v(L) = C_1 = \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$. Koska haetaan ei-triviaalia ratkaisua, on oltava $C_1 \neq 0$. Siis, $\sqrt{\lambda}L = n\pi, n = 1, 2, 3, \ldots$. Tällöin ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisfunktiot ovat

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad v_n = \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.11}$$

Tapaus $\lambda = 0$. Superpositioperiatteen (lause (2.1.1)) mukaan differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu (määritelmä (2.5)) on muotoa

$$y = C_1x + C_2. \tag{2.12}$$

Reunaehdoista saadaan $y(0) = C_2 = 0$ ja $y(L) = LC_1 = 0$, joten $C_1 = 0$. Siis, tässä tapauksessa saadaan vain triviaaliratkaisu $y = 0$.

Tapaus $\lambda < 0$. Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$v = C_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}x). \tag{2.13}$$

Reunaehdoista saadaan $y(0) = C_2 = 0$ ja $y(L) = C_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}L) = 0$, josta seuraa $C_2 = 0$. Näin ollen myös tapauksessa $\lambda < 0$ saadaan vain triviaaliratkaisu $y = 0$.

Yhteenvetona päätellään, että osittaisdifferentiaaliyhtälöllä (2.9) ja vastaavasti yhtälöllä (2.8) on ei-triviaali ratkaisu vain tapauksessa $\lambda > 0$.

2.4.2 Sturm-Liouvillen ongelma. Alueena suorakulmio

Tässä kappaleessa alueena käsitellään suorakulmainen levy

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}.$$

Sturm-Liouvillen ongelma (2.8) saadaan muotoon:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \lambda v = 0, \qquad (x, y) \in D, \\ &v(0, y) = v(L_x, y) = 0, \qquad 0 < y < L_y, \\ &v(x, 0) = v(x, L_y) = 0, \qquad 0 < x < L_x. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Käytetään muuttujien erottamismenetelmä (määritelmä (2.8)), jotta ratkaista edellä esitetyn reuna-arvo-ongelman. Huomataan, että Sturm-Liouvillen ongelman osittaisdifferentiaaliyhtälöllä (2.14) on ei-triviaali ratkaisu ($v(x, y) \neq 0$) vain tapauksessa $\lambda > 0$. Oletetaan, että ei-triviaali ratkaisu on muotoa $v(x, y) = X(x)Y(y), 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$.
Sijoittamalla ratkaisu edellä esitetyssä muodossa yhtälöön (2.14) saadaan

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{X''}{X}.$$

Jälkimmäisen lausekkeen vasen ja oikea puoli on funktioita eri muuttujista: vasen puoli on funktio muuttujasta y ja oikea puoli on funktio muuttujasta x. Siis, yhtälön on oltava puolittaen sama vakio. Merkitään tätä vakiota kirjaimella μ:

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{X''}{X} = \mu. \tag{2.15}$$

Kun sijoitetaan reunaehdot, saadaan

$$\begin{aligned} X(0)Y(y) &= X(L_x)Y(y) = 0, \qquad 0 < y < L_y, \\ X(x)Y(0) &= X(x)Y(L_y) = 0, \qquad 0 < x < L_x. \end{aligned}$$

Ei-triviaalin ratkaisun saamiseksi tarvitaan seuraavien ehtojen toteutumista: $Y(y) \neq 0, y \in (0, L_y)$ ja $X(x) \neq 0, x \in (0, L_x)$. Siis, kahden jälkimmäisten reunaehtojen täyttämiseksi on oltava

$$X(0) = X(L_x) = Y(0) = Y(L_y) = 0.$$

Tällöin funktioiden X ja Y ratkaisemiseksi, saadaan 2 yksiulotteista Sturm-Liouvillen ongelmaa (2.9), joiden ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisfunktiot ovat muotoa(2.11).

Funktio X ratkaistaan seuraavasta Sturm-Liouvillen ongelmasta (yhtälön (2.15) nojalla):

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \mu X = 0, \quad X(0) = X(L_x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x.$$

Funktio Y ratkaistaan seuraavasta Sturm-Liouvillen ongelmasta (yhtälön (2.15) nojalla):

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \nu Y = 0, \quad Y(0) = Y(L_y) = 0, \quad 0 \leq y \leq L_y,$$

missä $\nu = \lambda - \mu$.

Saatujen tulosten (2.11) perusteella nämä funktiot ovat muotoa:

$$X_m(x) = a_m \sin(\frac{m\pi x}{L_x}), \quad \mu_m = \Big(\frac{m\pi}{L_x}\Big)^2, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

$$Y_n(y) = b_n \sin(\frac{n\pi y}{L_y}), \quad \nu_n = \Big(\frac{n\pi}{L_y}\Big)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

Siis, kaksiulotteisen Sturm-Liouvillen ongelman (2.14) ominaisfunktiot ja niitä vastaavat ominaisarvot saadaan muotoon

$$\begin{aligned} v_{mn}(x,y) &= X_m(x)Y_n(y) = c_{mn} \sin(\frac{m\pi x}{L_x}) \sin(\frac{n\pi y}{L_y}), \\ \lambda_{mn} &= \mu_m + \nu_n = \pi^2 \Big(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\Big), \quad m, n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Tässä a_m, b_n, c_{mn} ovat vakioita.

2.4.3 Sturm-Liouvillen ongelma. Alueena yksikköympyrä

Tässä kappaleessa alueena käsitellään yksikköympyrä

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Reuna-arvo-ongelmasta (2.8) saadaan seuraava Sturm-Liouvillen ongelma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \lambda v = 0, &\qquad (x, y) \in D, \\ v(x, y) = 0, &\qquad x^2 + y^2 = 1, \end{aligned} \tag{2.19}$$

missä $\lambda > 0$ ei-triviaalin ratkaisun ($v(x, y) \neq 0$) saamiseksi.

Tässä tehtävässä on luonnollista ottaa käyttöön napakoordinaatit (r, θ):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad v(x, y) = \bar{v}(r, \theta) \quad 0 \leq r \leq 1, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Tällöin Sturm-Liouvillen ongelma (2.19) saadaan muotoon:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d\bar{v}}{dr}) + \frac{1}{r_2}\frac{d^2\bar{v}}{d\theta^2} + \lambda\bar{v} = 0, &\qquad 0 \leq r \leq 1, \quad -\pi \leq \theta < \pi, \\ \bar{v}(1, \theta) = 0, &\qquad -\pi \leq \theta < \pi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Alkuperäisillä koordinaateilla (x, y) funktion $v(x, y)$ oletetaan olevansa sileä yksikköympyrän alueella. Siirtyessään napakoordinaateille, jotta funktio olisi hyvin määritelty, meidän on otettava käyttöön seuraavat ylimääräiset ehdot:

$$\bar{v}(r, -\pi) = \bar{v}(r, \pi), \qquad \bar{v}_\theta(r, -\pi) = \bar{v}_\theta(r, \pi). \tag{2.21}$$

Käytetään muuttujien erottamismenetelmää (määritelmä (2.8)) reuna-arvo-ongelman (2.20) ratkaisemiseksi. Oletetaan, että ei-triviaali ratkaisu on muotoa

$$\bar{v}(r, \theta) = R(r)H(\theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad -\pi \leq \theta < \pi. \tag{2.22}$$

Lisäksi on huolehdittava siitä, että funktio $R(r)$ on rajoitettu välillä $0 \leq r \leq 1$, sillä ratkaisu $v(x, y)$ on rajoitettu ympyrän alueessa.

Sijoittamalla ratkaisu muodossa (2.22) yhtälöön (2.20) saadaan

$$r\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big)\frac{1}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{d^2H}{d\theta^2}\frac{1}{H(\theta)}.$$

Jälkimmäisen lausekkeen vasen ja oikea puoli on funktiot eri muuttujista: vasen puoli on funktio muuttujasta r ja oikea puoli on funktio muuttujasta θ.

Siis, tämän yhtälön on oltava puolittain sama vakio. Merkitään tätä vakiota kirjaimella μ:

$$r\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big)\frac{1}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{d^2H}{d\theta^2}\frac{1}{H(\theta)} = \mu.$$

Sturm-Liouvillen ongelman (2.20) reunaehdosta seuraa, että $\bar{v}(1,\theta) = R(1)H(\theta) = 0$. Ei-triviaalin ratkaisun ($H(\theta) \neq 0$) saamiseksi tulon nollasäännöstä seuraa, että

$$R(1) = 0. \tag{2.23}$$

Sijoittamalla ratkaisun (2.22) ylimääräisiin reunaehtoihin (2.21) saadaan

$$H(-\pi) = H(\pi), \qquad \frac{dH}{d\theta}(-\pi) = \frac{dH}{d\theta}(\pi). \tag{2.24}$$

Siis, funktio $H(\theta)$ ratkaistaan seuraavasta reuna-arvotehtävästä, jonka differentiaaliyhtälö on samanlainen kuin reuna-arvotehtävän (2.9) differentiaaliyhtälö:

$$\frac{d^2H}{d\theta^2} + \mu H(\theta) = 0; \quad H(-\pi) = H(\pi), \quad \frac{dH}{d\theta}(-\pi) = \frac{dH}{d\theta}(\pi). \tag{2.25}$$

Käyttämällä tuloksia, jotka ovat saatu reuna-arvotehtävän (2.9) ratkaisemisessa, saadaan Sturm-Liouvillen ongelman (2.25) ominaisfunktiot.
Tapauksessa $\mu < 0$ saadaan vain triviaali ratkaisu $H(\theta) = 0$.
Tapauksessa $\mu = 0$ saadaan ei-triviaali ratkaisu $H(\theta) = vakio$.
Tapauksessa $\mu > 0$ ei-triviaali ratkaisu on muotoa

$$H_m(\theta) = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta), \tag{2.26}$$

missä merkitään $\mu = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$.

Funktion $R(r)$ ratkaisemiseksi saadaan yhtälö

$$r\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big)\frac{1}{R(r)} + \lambda r^2 = \mu = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä ottamalla käyttöön reunaehdon (2.23) ja funktion $R(r)$ rajoitusehdon saadaan seuraava reuna-arvotehtävä funktion $R(r)$ ratkaisemiseksi:

$$r^2\frac{d^2R_m}{dr^2} + r\frac{dR_m}{dr} + (\lambda r^2 - m^2)R_m = 0; \quad R_m(1) = 0, \quad |R_m(0)| < M, M \in R.$$

Koska $\lambda > 0$, voidaan ottaa käyttöön uusi muuttuja

$$s = \sqrt{\lambda}r, \quad \bar{R}_m(s) = R_m(r).$$

Siis, funktio $\bar{R}(r)$ ratkastaan seuraavasta reuna-arvotehtävästä, jonka differentiaaliyhtälöä kutsutaan Besselin yhtälöksi:
(2.27)
$$s^2\frac{d^2\bar{R}_m}{ds^2}+s\frac{d\bar{R}_m}{ds}+(s^2-m^2)\bar{R}_m=0; \quad \bar{R}_m(\sqrt{\lambda})=0, |\bar{R}_m(0)|<M, \quad M\in R.$$

Besselin yhtälöllä on kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua: m:s ensimmäisen lajin Besselin funktio $J_m(s)$ ja m:s toisen lajin Besselin funktio $Y_m(s)$ (Abramowitz & Stegun [1]). Yhtälön ratkaisun yleinen muoto on $\bar{R}_m(s) = c_{m1}J_m(s) + c_{m2}Y_m(s)$, missä c_{m1}, c_{m2} ovat vakiot. Koska funktio $J_m(s)$ on rajoitettu pisteessä $s = 0$ ja funktio $Y_m(s)$ on rajaton tässä pisteessä:

$$\lim_{s\to 0} Y_m(s) = \infty,$$

niin tehtävän (2.27) rajoitusehdon nojalla on oltava $c_{m2} = 0$.

Sturm-Liouvillen ongelman (2.27) ominaisfunktiot ovat siis muotoa

$$\bar{R}_m(s) = c_mJ_m(s), \quad R_m(r) = c_mJ_m(\sqrt{\lambda}r), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.28}$$

Sturm-Liouvillen ongelman (2.27) toinen reunaehto vaatii, jotta

$$\bar{R}_m(\sqrt{\lambda}) = R_m(1) = J_m(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Jokaisella Besselin funktiolla $J_m(s)$ on ääretön määrä juuria (Abramowitz & Stegun [1]). Olkoon j_{mn} funktion $J_m(s)$ n:s juuri. Tällöin Sturm-Liouvillen ongelman (2.27) ominaisarvojen saamiseksi jälkimmäisen lausekkeen nojalla saadaan yhtälö

$$\sqrt{\lambda} = j_{mn}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.29}$$

Siis, kaavojen (2.22), (2.26), (2.28) ja (2.29) avulla kaksiulotteisen Sturm-Liouvillen ongelman (2.19) (tai (2.20) napakoordinaateissa) ominaisfunktiot ja niitä vastaavat ominaisarvot saadaan muotoon

(2.30)
$$\begin{aligned} v_{mn}(x,y) =& v_{mn}(r,\theta) = \\ =& \begin{cases} J_0(rj_{0n}), & n = 1, 2, 3, \ldots, \\ J_m(rj_{mn})(\alpha_{mn}\cos(m\theta) + \beta_{mn}\sin(m\theta)), & m, n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \\ \lambda_{mn} =& j_{mn}^2, \qquad\qquad\qquad\qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Luku 3

1-ulotteisen lämpöyhtälö

3.1 1-ulotteisen lämpöyhtälön johto

Päälähdeteoksina tässä kappaleessa käytetään seuraavia lähteitä: Hancock [4], luentomonisteet Kumpulainen [5], Parvinen [7], Tuomela [8].

Lämpöyhtälöllä mallinnetaan lämmönjohtumista, joka kuuluu diffuusioprosesseihin, sillä kyseessä on siirtoilmiö (lämmönsiirto).
Tarkastellaan ohutta sylinterinmuotoista L:n pituista sauvaa, jonka poikkipinta-ala on A. Olkoon sauvan päätepisteet xy-tasolla ovat $(0, 0)$ ja $(L, 0)$. Jokaisessa sauvan pisteessä x on lämpötilä $u(x, t)$. Seuraavat oletukset ovat voimassa:
- lämpö virtaa sauvassa vain x-akselin suuntaan;
- sauva on päitä lukuunottamatta täysin eristetty;
- sauvan sisällä ei synny lämpöä;
- sauvan tiheys ρ on vakio jokaisessa pisteessä;
- sauvan materiaalin ominaislämpö γ ja lämmönjohtuvuus K ovat molemmat vakioita.

Lämpöyhtälön johtaminen perustuu seuraaviin kokeellisiin lämmön johtuvuuslakeihin (Hancock [4], Lienhard [6]):

- massa-alkion lämpömäärä
- Fourier laki
- energian säilymisen laki.

Määritelmä 3.1. Käsitellään pientä tilavuusalkiota (massa-alkio) $\triangle V = dxdydz$. Massa-alkion *lämpömäärä* on

$$q(x, y, z, t) = \gamma m u = \gamma\rho\triangle V u(x, y, z, t), \tag{3.1}$$

ja vastaava *lämpöenergian* tiheys on

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \gamma\rho u(x, y, z, t), \tag{3.2}$$

missä u on massa-alkion lämpötila.

Määritelmä 3.2. Fourier laki. Alueen läpi virtaavan lämmön *virtausnopeus* (*lämpövirta*) kohdassa $\mathbf{x} = (x, y, z)$ on suoraan verrannollinen alueen poikkileikkauspinta-alaan A ja lämpötilan u derivaattaan paikan suhteen. Lämpövirta pinta-alayksikköä kohden (lämpövirran tiheys) kutsutaan *lämpövuoksi.*
Fourierin laki kertoo lämpövuon ja lämpötilan välillä olevan yhteyden:

$$\vec{q} = -k\nabla u = -k(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}). \tag{3.3}$$

Koska lämpövirtaus tapahtuu aina kylmenpään lämpötilaan, kaavan miinusmerkki takaa sen, että q on positiivinen, kun $u_x < 0$ ja negatiivinen, kun $u_x > 0$.

Siis. Lämpöenergia E on suoraan verrannollinen lämpötilaan u. Koska sauva on homogeeninen, niin sen energia on:

$$E(t) = \int_0^L \gamma\rho u(x,t)Adx.$$

Tämän energian muutos ajan myötä on:

$$E'(t) = \int_0^L \gamma\rho u_t(x,t)Adx,$$

Toisalta, jossakin prosessissa kehittyvää lämpöenergian määrää (eli prosessin aikana tapahtunutta energian muutosta) kuvaillaan toisen fysikaalisen suureen avulla - lämpömäärän avulla (määritelmä (3.1)). Koska sauva on päitä lukuunottamatta täysin eristetty, energian säilymisen perusteella lämpö voi poistua vain sauvan päistä. Siis, kyseessä olevan prosessin aikana tapahtunut lämpöenergian muutos on:

$$-Aq(L,t) + Aq(0,t) = -A\int_0^L q_x(x,t)dx.$$

Koska jälkimmäisten yhtälöiden vasemmat puolet ovat samat, niin oikeapuoleisten osien yhtäsuuruudesta saadaan:

$$\int_0^L \gamma\rho u_t(x,t)Adx + A\int_0^L q_x(x,t)dx = 0,$$

$$\int_0^L (\gamma\rho u_t(x,t) + q_x(x,t))Adx = 0.$$

Oletuksen mukaan tällä kaavalla ilmaistu relaatio on voimassa jokaisessa sauvan mielivaltaisessa pisteessä ja jokaisella mielivaltaisella ajanhetkellä. Tämä on mahdollista vain silloin, kun integraalin alla oleva lauseke on nolla:

$$\gamma\rho u_t + q_x = 0. \tag{3.4}$$

Fourier lain mukaan energian virta menee kuumasta kylmempään. Siis, voidaan olettaa, että lämpövuo on suoraan verrannollinen lämpötilojen eroon:

$$q = -Ku_x, \tag{3.5}$$

missä K on lämmönjohtumiskerroin. Koska lämpövirtaus tapahtuu aina kylmenpään lämpötilaan, kaavan miinusmerkki takaa sen, että q on positiivinen, kun $u_x < 0$ ja negatiivinen, kun $u_x > 0$.

Derivoimalla funktio (3.5) x:n suhteen ja sijoittamalla tulos kaavaan (3.4) saadaan 1-ulotteisen lämpöyhtälö:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \tag{3.6}$$

missä $k = K/(\gamma\rho)$ on diffuusiovakio.

1-ulotteinen lämpöyhtälö (3.6) on toisen kertaluvun lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö (2.1), mm. parabolinen differentiaaliyhtälö ((2.2), määritelmä 4).

3.2 1-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaiseminen muuttujien erottamismenetelmällä

3.2.1 Homogeeninen lämpöyhtälö

Homogeeniset reunaehdot

Jatketaan L-pituisen tangon tarkastelua. Kuten on ollut puhetta, ratkaisuja on tyypillisesti ääretön määrä. Yleensä ei haluta yleistä ratkaisua, vaan haluttaisiin antaa joitain sopivia lisäehtoja, jotka sitten antaisivat yksikäsitteisen ratkaisun.

Ratkaisulle tehdään seuraavat oletukset:
- sauvan pinta on lämpöeristetty;
- sauvan molemmat päät ovat lämpötilassa 0-astetta;
- lämpötilaa tangossa kuvaa *lämpöfunktio* $u = u(x,t)$, missä x on etäisyys sauvaa pitkin sen alkupäästä ja t on aika;
- alkuhetkellä $t = 0$ tangon lämpöfunktio on $u(x,0) = f(x), 0 < x < L$.

Edellä esitettyjen oletusten varustettuna lämpöfunktio $u(x,t)$ toteuttaa seuraavan reuna-arvo-ongelman (määritelmät (2.6), (2.7)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t > 0, \tag{3.7}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \geq 0; \tag{3.8}$$

$$u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0; \tag{3.9}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3.10}$$

Käytetään muuttujien erottamismenetelmää (määritelmä (2.8)) edellä esitetyn reuna-arvo-ongelman ratkaisemiseksi. Oletetaan, että ei-triviaali ratkaisu ($u(x,t) \neq 0$) on muotoa

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \tag{3.11}$$

Sijoittamalla (3.11) yhtälöön (3.7) saadaan:

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{T^{'}(t)}{kT(t)}.$$

Tämän yhtälön vasen ja oikea puoli riippuu eri muuttujista, joten molemmat puolet ovat vakioita. Otetaan käyttöön seuraava merkintä:

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{T^{'}(t)}{kT(t)} = -\lambda.$$

Tällöin funktiot X ja T voidaan ratkaista seuraavista tavallisista differentiaaliyhtälöistä:

$$X^{''} + \lambda X = 0, \qquad T^{'} + \lambda kT = 0. \tag{3.12}$$

Kääntäen, jos X ja T ovat yhtälöiden (3.12) ratkaisut, niin yhtälöllä (3.11) määritelty funktio u on yhtälön (3.7) ratkaisu, sillä

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = X(x)T^{'}(t) - kX^{''}(x)T(t) = \\ = X(x)[-\lambda kT(x)] - k[-\lambda X(x)]T(t) = 0.\end{aligned}$$

Nyt, ottaen huomioon reunaehdot (3.8) ja (3.9) voidaan ratkaista funktio X seuraavasta reuna-arvotehtävästä (Sturm-Liouvillen ongelma (2.9)):

$$X^{''} + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0. \tag{3.13}$$

Yhtälön $X^{''} + \lambda X = 0$ yleinen ratkaisu kaavojen (2.10), (2.12), (2.13) mukaan on

$$X(x) = \begin{cases} C_1 x + C_2, & \lambda = 0, \\ C_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}x), & \lambda < 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0. \end{cases}$$

Siis, reuna-arvo-ongelmalla (3.13) on ei-triviaaliratkaisu jos ja vain jos

$$\lambda = \lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.14}$$

Olkoon $C_2 = 1$. Tällöin vastaavat ratkaisut ovat:

$$X_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L}), \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.15}$$

Nyt funktio T ratkaistaan jälkimmäisestä yhtälöstä (3.12), johon sijoitetaan kaavalla (3.14) määriteltyt vakiot λ_n.
Tämän yhtälön yleinen ratkaisu on (määritelmä (2.5)):

$$T(t) = C\exp(-\lambda_n kt), \tag{3.16}$$

josta saadaan valitsemalla vakion arvoksi $C = 1$ seuraavat ratkaisut funktioksi T:

$$T_n(t) = \exp(-\lambda_n kt) = \exp(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}), \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.17}$$

Sijoittamalla saadut lausekkeet (3.15) ja (3.17) yhtälöön (3.11) saadaan lämpöfunktiot

$$u_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi x}{L})\exp(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

jotka toteuttavat lämpöyhtälön (3.7) ja reunaehdot (3.8) ja (3.9).

Viimeiseksi etsitään ratkaisua, joka toteuttaisi myös alkuehto (3.10). Tätä ratkaisua etsitään sarjamuodossa ominaisfunktioiden summana (määritelmä (2.14)).

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\exp(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}). \tag{3.18}$$

Sovelletaan ehtoa (3.10) kaavassa (3.18):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{3.19}$$

Kaava (3.19) on funktion f Fourier-sinisarja. Siis, kertoimet lasketaan seuraavasti (määritelmä (2.9)):

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx. \tag{3.20}$$

Sarja (3.19), missä kertoimet b_n ovat Fourier'n kertoimet (3.20), suppenee kohti funktiota f seuraavilla oletuksilla:

- f on jatkuva välillä $[0, L]$;
- f' on paloittain jatkuva välillä $[0, L]$;
- $f(0) = f(L) = 0$.

Tällöin myös sarja (3.18) suppenee ja esittää jatkuvaa funktiota u, kun $0 \leq x \leq L$ ja $t \geq 0$. Funktiolla u on jatkuvat kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat alueessa $R = \{(x,t) \in R^2 \mid 0 < x < L, t > 0\}$, jotka saadaan derivoimalla sarjaa (3.18) termeittäin.

Näin on saatu 1-ulotteisen lämpöyhtälön (3.7) ratkaisu $u(x,t)$ reunaehdoilla (3.8) - (3.10).

Lause 3.2.1. *1-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaisu on yksikäsitteinen.*

Todistetaan saadun ratkaisun yksikäsitteisyys. Koska kyseessä on lineaarinen tehtävä, niin tämän ratkaisun yksikäsitteisyyden todistamiseksi käytetään tyypillistä todistustekniikkaa: oletetaan, että on olemassa 2 ratkaisua, muodostetaan niiden erotus ja pyritään osoittamaan, että tämä erotus on identtisesti nolla.

Todistus. Oletetaan, että on olemassa reuna-arvotehtävän (3.7) - (3.10) 2 ratkaisua u_1 ja u_2. Käsitellään niiden erotusta $u = u_1 - u_2$ ja näytetään, että $u = 0$.
Nyt, u on seuraavan reuna-arvotehtävän ratkaisu:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Tarkastellaan funktiota $H(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx$.
Derivoimalla tätä funktiota saadaan

$$H'(t) = \int_0^L uu_t dx = k \int_0^L uu_{xx} dx = k \left.\right|_0^L uu_x - k \int_0^L u_x^2 dx = -k \int_0^L u_x^2 dx \leq 0.$$

Koska $H(0) = 0$, $H(t) \geq 0$ ja $H'(t) \leq 0$ kaikilla t, niin $H = 0$. Tämä on mahdollista vain jos $u = 0$. $\square$

Epähomogeeniset reunaehdot

Tässä kappaleessa etsitään lämpöfunktio $u(x,t)$, joka toteuttaa seuraavan reuna-arvo-ongelman (määritelmät (2.6), (2.7)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \tag{3.21}$$

$$u(0,t) = A, \qquad t > 0; \tag{3.22}$$

$$u(L,t) = B, \qquad t > 0; \tag{3.23}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3.24}$$

Tätä tehtävää voidaan palauttaa tehtäväksi (3.7)-(3.10) seuraavasti.
Ensin määritellään polynomi $g(x) = c_1 x + c_2$, jolle pätee
$g(0) = A$ ja $g(L) = B$.
Sitten määritellään vakiot c_1 ja c_2:

$$g(0) = c_2 = A \qquad \rightarrow \qquad c_2 = A,$$

$$g(L) = c_1 L + c_2 = B \qquad \rightarrow \qquad c_1 = \frac{B-A}{L}.$$

Täten polynomi on

$$g(x) = \frac{B-A}{L}x + A. \tag{3.25}$$

Seuraavaksi oletetaan, että $u(x,t)$ on reuna-arvotehtävän (3.21)-(3.24) ratkaisu, ja olkoon

$$v(x,t) = u(x,t) - g(x). \tag{3.26}$$

Nyt:

$$\begin{aligned}
&g^{''}(x) = 0,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\
&v(0,t) = u(0,t) - g(0) = A - A = 0,\\
&v(L,t) = u(L,t) - g(L) = B - B = 0,\\
&\quad v(x,0) = u(x,0) - g(x) = f(x) - g(x), \qquad 0 \le x \le L.
\end{aligned}$$

Täten funktio v toteuttaa tyyppiä (3.7)-(3.10) olevan reuna-arvo-ongelman (eli reuna-arvotehtävä homogeenisilla reunaehdoilla, määritelmä (2.7)):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \tag{3.27}$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{3.28}$$

$$v(x,0) = f(x) - g(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3.29}$$

Funktio v saadaan edelisessä kappaleessa esitetyllä muuttujien erottamismenetelmällä. Funktion v ja polynomin g (3.25) avulla saadaan tehtävän (3.21)-(3.24) ratkaisu

$$u(x,t) = v(x,t) + g(x) = v(x,t) + \frac{B-A}{L}x + A.$$

3.2.2 Epähomogeeninen lämpöyhtälö

Homogeeniset reunaehdot

Etsitään ratkaisua lämpöfunktioksi $u(x,t)$, joka toteuttaa epähomogeenisen lämpöyhtälön homogeenisilla reuna- ja alkuehdoilla, eli toteuttaa seuraavan reuna-arvo-ongelman (määritelmä (2.6)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \tag{3.30}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{3.31}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{3.32}$$

Tehdään seuraavat oletukset:
(i) jatkuvalla funktiolla $f(x,t)$ on paloittain jatkuva ensimmäisen kertaluvun derivaatta x:n suhteen;
(ii) $f(0,t) = f(L,t) = 0, \qquad t > 0;$
(iii) funktio $f(x,t)$ voidaan esittää Fourier-sarjana (määritelmä (2.9)):

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{L}), \tag{3.33}$$

missä

$$f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx.$$

Ensin etsitään tehtävän (3.30) - (3.32) ratkaisua muodossa , joka toteuttaa reunaehdot (3.31). Tätä ratkaisua etsitään sarjamuodossa ominaisfunktioiden summana (määritelmä (2.14)):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{L}). \tag{3.34}$$

Sijoittamalla ratkaisu-sarjan (3.34) lämpöyhtälöön (3.30) ottaen huomioon oletuksen (3.33) saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n^{'}(t) + \lambda_n k T_n(t) - f_n(t)]\sin(\frac{n\pi x}{L}) = 0,$$

missä vakiot λ_n määritellään kaavalla (3.14). Tämä yhtälö toteuttuu, kun:

$$T_n^{'}(t) + \lambda_n k T_n(t) = f_n(t). \tag{3.35}$$

Alkuehdon (3.32) pitää toteuttua, joten:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(\frac{n\pi x}{L}) = 0,$$

mistä saadaan seuraava alkuehto funktiolle $T_n(t)$:

$$T_n(0) = 0. \tag{3.36}$$

Funktio $T_n(t)$ saadaan ratkaisemalla osittaisdifferentiaaliyhtälön (3.35) nolla-alkuehdolla (3.36):

$$T_n(t) = \int_0^t \exp\left(-\lambda_n k(t-\tau)\right) f_n(\tau) d\tau.$$

Sijoittamalla tämän lausekkeen sarjaan (3.34) saadaan reuna-arvo-ongelman (3.30) - (3.32) ratkaisun seuraavassa muodossa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\int_0^t \exp\left(-\lambda_n k(t-\tau)\right) f_n(\tau) d\tau] \sin(\frac{n\pi x}{L}). \tag{3.37}$$

Käyttämällä kaavaa (3.33) muunnetaan ratkaisu (3.37) muotoon:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t \int_0^L \{\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_n k(t-\tau)\right) \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\frac{n\pi \xi}{L})\} \times \\ \times f(\xi,\tau) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^L G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{3.38}$$

missä

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_n k(t-\tau)\right) \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\frac{n\pi \xi}{L}).$$

Funktiota $G(x,\xi,t)$ kutsutaan pistemäiseksi lämpölähteeksi, tai *Greenin funktioksi.* Funktiota $G(x,\xi,t)$ ajatellaan muuttujan x funktiona. Fysikaalisesti funktio $G(x,\xi,t)$ kuvaa lämpötilän jakaumaa sauvassa $0 \leq x \leq L$ ajanhetkellä t. Edellä mainitun jakauman aiheutti pistemäinen lämmönlähde, joka on ollut sijoitettu kohdassa $x = \xi$ hetkellä $t = 0$ ehdoilla, että sauvan päätepisteiden lämpötila pidetään nollan tasolla.

Lauseen (2.1.2) mukaan epähomogeenisen alkuehdon tapauksessa reuna-arvotehtävän (3.30) - (3.31) ratkaisua saadaan laskemalla yhteen ratkaisu (3.38) ja vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu annetulla alkuehdolla $u(x,0) = \varphi(x)$, kun $0 \leq x \leq L$, ja reunaehdoilla (3.31), jonka ratkaisutekniikkaa esitettiin kappaleessa 3.2.1 (reuna-arvotehtävän (3.7) - (3.10) ratkaiseminen).

Epähomogeeniset reunaehdot

Nyt etsitään ratkaisua lämpöfunktioksi $u(x,t)$, joka toteuttaa epähomogeenisen lämpöyhtälön epähomoheenisilla reuna- ja alkuehdoilla, eli toteuttaa seuraavan reuna-arvo-ongelman (määritelmä (2.6)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0; \tag{3.39}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \qquad u(L,t) = \psi_2(t), \qquad t > 0; \tag{3.40}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3.41}$$

Tälläisen tehtävän ratkaiseminen voidaan johtaa edellä käsiteltyjen tehtävien ratkaisemiseen seuraavalla tavalla.

Oletetaan, että funktio $u(x,t)$ voidaan esittää kahden funktioiden summana:

$$u = v + w. \tag{3.42}$$

Tässä funktiot v ja w ovat sellaiset, että:
- funktio *v(x, t)* toteuttaa seuraavan reuna-arvo-ongelman (homogeeninen yhtälö ja epähomogeeniset reuna- ja alkuehdot):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0; \tag{3.43}$$

$$v(0,t) = \psi_1(t), \qquad v(L,t) = \psi_2(t), \qquad t > 0; \tag{3.44}$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3.45}$$

- funktio *w(x, t)* toteuttaa seuraavan reuna-arvo-ongelman (epähomogeeninen yhtälö ja homogeeniset reuna- ja alkuehdot):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0; \tag{3.46}$$

$$w(0,t) = 0, \qquad w(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{3.47}$$

$$w(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{3.48}$$

Osoitetaan, että summa (3.42) toteuttaa reuna-arvo-ongelman (3.39) - (3.41):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v+w) + f(x,t) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t).$$

Luku 4

Moniulotteinen lämpöyhtälö

4.1 3-ulotteisen lämpöyhtälön johto

Päälähdeteoksina tässä kappaleessa käytetään seuraavia lähteitä: Guenther [3], Hancock [4], Lienhard [6], luentomonisteet Kumpulainen [5], Parvinen [7], Tuomela [8].

Tarkastellaan säännöllistä 3D-aluetta V ($V \subseteq R^3$), jonka reuna on ∂V. Jokaisella alueen pisteellä $\mathbf{x} = (x, y, z) \in V$ on lämpötilä $u(\mathbf{x}, t)$. Seuraavat ehdot ovat voimassa:
- alue on reunoja lukuunottamatta täysin eristetty;
- alueen sisällä ei synny lämpöä;
- tiheys ρ on vakio jokaisessa tilavuusalkiossa alueen sisällä;
- alueen materiaali on homogeeninen, ominaislämpö γ ja lämmönjohtuvuus K ovat vakioita.

Lause 4.1.1. *3-ulotteisen säännöllisen alueen muotoisen kappaleen lämpötila toteuttaa seuraavaa toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöä* (2.1)*, joka on tyypillinen esimerkki parabolisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä (*(2.2)*, määritelmä 4):*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}), \tag{4.1}$$

missä $k = K/(\gamma\rho)$.

Todistus. Johdetaan 3-ulotteinen lämpöyhtälö (4.1).

Lämpöyhtälön johtaminen perustuu seuraaviin kokeellisiin lämmön johtuvuuslakeihin (Hancock [4], Lienhard [6]):

- massa-alkion lämpömäärä (määritelmä (3.1))
- Fourier laki (määritelmä (3.2)
- energian säilymisen laki.

Energian säilymislaki on voimassa jokaisessa alueen V pisteessä. Tämän lain nojalla rajoitetun alueen lämpöenergiamuutoksen nopeus on yhtä suuri kuin lämpöenergian virtaus sitä vastaavan reunan läpi.

Koko alueen V lämpöenergia voidaan laskea seuraavasti:

$$\int\int_V\int \varepsilon(x, y, z, t)dV,$$

missä $\varepsilon(x, y, z, t)$ energiatiheys.

Lämpöenergiavirtaus alueen reunan ∂V läpi on:

$$\int_{\partial V}\int \vec{q} \cdot \vec{n} dS,$$

missä $\vec{q}$ on lämpövuo, $\vec{n}$ on alueen yksikköulkonormaali ja integraali on pintaintegraali.

Divergenssilauseen (2.3.1) avulla jälkimmäinen lauseke voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\int\int_V\int \nabla \cdot \vec{q} dV.$$

Siis, energian säilymislaki koko alueelle V voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int_V\int \varepsilon(x, y, z, t)dV = -\int\int_V\int \nabla \cdot \vec{q} dV.$$

Tästä saadaan:

$$\int\int_V\int \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dV = 0.$$

Oletuksen mukaan tällä kaavalla ilmaistu relaatio on voimassa jokaisessa alueen mielivaltaisessa pisteessä ja jokaisella mielivaltaisella ajanhetkellä. Tämä on mahdollista vain silloin, kun integraalin alla oleva lauseke toteuttaa relaation, eli se on nolla:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0.$$

Soveltamalla kaavoja (3.2) ja (3.3) jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan 3-ulotteisen lämpöyhtälön (4.1). □

4.2 2-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaiseminen

4.2.1 2-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaisu. Alueena suorakulmio. Homogeeniset reunaehdot

Jos $u = u(x, y, t)$ kuvaa suorakulmaisen levyn $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$ pisteen (x, y) lämpötilaa hetkellä $t \geq 0$, kun levyn reunat ovat 0-asteessa ja alkuhetken $t = 0$ lämpötilajakauma tunnetaan, niin u toteuttaa reuna-arvo-ongelman

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big), \qquad 0 \le x \le L_x, \quad 0 \le y \le L_y, \quad t \ge 0, \tag{4.2}$$

$$u(0, y, t) = u(L_x, y, t) = 0, \qquad 0 \le y \le L_y, \quad t > 0, \tag{4.3}$$

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0, \qquad 0 \le x \le L_x, \quad t > 0, \tag{4.4}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y. \tag{4.5}$$

Käytetään muuttujien erottamismenetelmää (määritelmä (2.8)) edellä esitetyn reuna-arvo-ongelman ratkaisemiseksi. Tämä ongelma kuuluu Sturm-Liouvillen ongelmien (2.14) joukkoon. Oletetaan, että ei-triviaali ratkaisu ($u(x, y, t) \neq 0$) on muotoa

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \qquad 0 \le x \le L_x, \quad 0 \le y \le L_y, \quad t \ge 0. \tag{4.6}$$

Kappaleessa 2.4.2 esitettyjen perustelujen mukaan funktioiden X ja Y ratkaisemiseksi saadaan 2 yksiulotteista Sturm-Liouvillen ongelmaa (2.9), joiden ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisfunktiot ovat muotoa(2.11). Funktio X ratkaistaan seuraavasta Sturm-Liouvillen ongelmasta (yhtälön (2.15) nojalla):

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \mu X = 0, \quad X(0) = X(L_x) = 0, \quad 0 \le x \le L_x.$$

Funktio Y ratkaistaan seuraavasta Sturm-Liouvillen ongelmasta (yhtälön (2.15) nojalla):

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \nu Y = 0, \quad Y(0) = Y(L_y) = 0, \quad 0 \le y \le L_y,$$

missä $\nu = \lambda - \mu$, λ ja μ esitettiin yhtälössä (2.15).

Kappaleessa 3.2.1 esitettyjen perustelujen mukaan funktion T ratkaisemiseksi saadaan seuraava tavallinen differentiaaliyhtälö:

$$T^{'} + \lambda_{mn} k T = 0,$$

missä λ_{mn} ovat kaavalla (2.18) määritellyt kaksiulotteisen Sturm-Liouvillen ongelman ominaisarvot.

Käyttämällä kaksiulotteisesta Sturm-Liouvillen ongelmasta saatuja tuloksia ominaisfunktioille ja niitä vastaaville ominaisarvoille (2.18) sekä ratkaisut funktiolle $T(t)$ (3.16) saadaan seuraava ratkaisu kaksiulotteiselle reuna-arvotehtävälle (4.2) - (4.4):

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} \sin\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big) \exp(-\pi^2 \Big(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\Big) kt), \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

Viimeiseksi etsitään ratkaisua, joka toteuttaisi myös alkuehtoa (4.5). Tätä ratkaisua etsitään sarjamuodossa ominaisfunktioiden summana (määritelmä (2.14)):

$$(4.7) \quad u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t) =$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big)\exp(-\pi^2\Big(\frac{m^2}{L_x^2}+\frac{n^2}{L_y^2}\Big)kt),$$

Sovelletaan ehtoa (4.5) kaavassa (4.7):

(4.8)
$$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}v_{mn}(x,y) = f(x,y),$$
$$0 \le x \le L_x, \qquad 0 \le y \le L_y.$$

Tässä
$$v_{mn}(x,y) = \sin\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big)$$
ovat kaksiulotteisen Sturm Liouvillen ongelman ominaisfunktiot (2.18), jotka määritelmän (2.13) mukaan muodostavat ortogonaalisysteemin.
Kertomalla molempia puolia funktioilla $v_{\hat{m}\hat{n}}(x,y), (\hat{m},\hat{n} = 1,2,3,\dots)$ ja integroimalla niitä yli suorakulmion saadaan
(4.9)
$$\int\int_{L_x\times L_y} f(x,y)v_{\hat{m}\hat{n}}(x,y)dA = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\int\int_{L_x\times L_y} v_{mn}(x,y)v_{\hat{m}\hat{n}}(x,y)dA,$$

missä $dA = dxdy$. Huomataan, että

$$\int\int_{L_x\times L_y} v_{mn}(x,y)v_{\hat{m}\hat{n}}(x,y)dA = \int_0^{L_x}\sin\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big)\sin\Big(\frac{\hat{m}\pi x}{L_x}\Big)dx\times$$
$$\times\int_0^{L_y}\sin\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big)\sin\Big(\frac{\hat{n}\pi x}{L_y}\Big)dy =$$
$$= \begin{cases} L_xL_y/4, & m=\hat{m}, n=\hat{n}, \\ 0, & \text{muutoin.}\end{cases}$$

Ottaen tämän huomioon kaavasta (4.9) saadaan

$$\int\int_{L_x\times L_y} f(x,y)v_{\hat{m}\hat{n}}(x,y)dA = \frac{A_{\hat{m}\hat{n}}}{4}L_xL_y.$$

Koska $\hat{m}, \hat{n}$ ovat mielivaltaisia muuttujia, voidaan vaihtaa $\hat{m}$ m:ksi ja $\hat{n}$ n:ksi ja viimeisestä lausekkeesta johtaa seuraavan lausekkeen kertoimien A_{mn} saamiseksi:

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int \int_{L_x \times L_y} f(x,y) v_{\hat{m}\hat{n}}(x,y) dA$$
$$= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x,y) \sin\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big) dy dx. \tag{4.10}$$

Siis, reuna-arvo-ongelman (4.2) - (4.5) ratkaisu on funktio (4.7), jossa kertoimet A_{mn} lasketaan kaavan (4.10) avulla.

4.2.2 2-ulotteisen lämpöyhtälön ratkaisu. Alueena yksikköympyrä. Homogeeniset reunaehdot

Tässä kappaleessa tutkittavana alueena käsitellään yksikköympyrää:

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Jos funktio $u = u(x,y,t)$ kuvaa yksikköympyrän pisteen $(x,y) \in D$ lämpötilaa hetkellä $t \geq 0$, kun ympyrän reunat ovat 0-asteessa ja alkuhetken $t = 0$ lämpötilajakauma tunnetaan, niin u toteuttaa seuraavan reuna-arvo-ongelman:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big), \qquad (x,y) \in D, \quad t \geq 0, \tag{4.11}$$

$$u(x,y,t) = 0, \qquad (x,y) \in \partial D, \quad t > 0, \tag{4.12}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \qquad (x,y) \in D. \tag{4.13}$$

Edellä esitetyn reuna-arvo-ongelman ratkaisemiseksi käytetään muuttujien erottamismenetelmää, ratkaisut funktiolle $T(t)$ (3.16) ja kaksiulotteisesta Sturm-Liouvillen ongelmasta (2.19) saadut tulokset ominaisfunktioille ja niitä vastaaville ominaisarvoille (2.30). Näin on tästä reuna-arvotehtävästä ratkaistut lämpöfunktiot ovat muotoa

$$u_{mn}(x,y,t) = v_{mn}(x,y) e^{-\lambda_{mn} t} = v_{mn}(x,y) e^{-j_{mn}^2 t},$$

missä ominaisfunktiot v_{mn} määritellään kaavalla (2.30).

Viimeiseksi etsitään ratkaisu, joka toteuttaisi myös alkuehtoa (4.13). Tämä ratkaisu etsitään sarjamuodossa ominaisfunktioiden summana (määritelmä (2.14)):

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(x,y) e^{-j_{mn}^2 t} =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(r j_{mn})(\alpha_{mn} \cos(m\theta) + \beta_{mn} \sin(m\theta)) e^{-j_{mn}^2 t}, \tag{4.14}$$

missä $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\tan\theta = y/x$.
Sijoittamalla ratkaisu (4.14) alkuehtoon (4.13) saadaan lauseke

$$f(x, y) = u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(x, y),$$

josta käyttämällä ortogonaalikehitelmien ominaisuuksia saadaan lausekkeet kertoimien α_{mn} ja β_{mn} laskemiseksi.

Kirjallisuutta

[1] Abramowitz, M. & Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs amd Mathematical Tables*, Applied Mathematics Series 55 (10 ed.). New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards; Dover Publications, 1972.

[2] Freiling, G. & Yurko V. *Lectures on Differential Equations of Mathematical Physics: A First Course*, Nova Science Publishers, Inc.: New York, 2008.

[3] Guenther, R.B. & Lee, J.W. *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations.* Dover Publications Inc.: Mineola, NY, 1996.

[4] Hancock, Matthew J. *The heat and wave equations in 2D and 3D*, 18.303 Linear Partial Differential Equations. Fall, 2006.

[5] Kumpulainen, Martti, *Differentiaaliyhtälöt II*, luentomoniste, Oulun yliopisto, 2014.

[6] Lienhard, John H. IV & Lienhard, John H. V *A Heat Transfer Textbook*, 3d ed. Cambridge, MA: Phlogiston Press, 2008.

[7] Parvinen, Kalle, *Osittaisdifferentiaaliyhtälöt*, luentomoniste. Turun yliopisto, 2007.

[8] Tuomela, Jukka, *Osittaisdifferentiaaliyhtälöt*, luentomoniste. Joensuun yliopisto, 2015.